偏微分方程式の精度保証付き数値計算法 (II): 半線形楕円型境界値問題

関根　晃太 *

* 東洋大学 情報連携学科

概要.　半線形楕円型境界値問題の解に対する精度保証付き数値計算法は中尾法、Plum 法、Newton-Kantorovich の定理を用いる方法など様々な方法がある。それぞれの手法の共通点や違い、歴史などの導入部分を交えながら半線形楕円型境界値問題の解に対する精度保証付き数値計算法の基礎の解説を行う。

目次

1. はじめに

本講演では簡単のため $\Omega = (0,1)^2$ のような正方形領域とする．本講演では次のような定常 Emden 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$
\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}
$$

の精度保証付き数値計算法を解説する. (丸カッコないは心の声です. 論文や書籍では書けない気持ち的な部分はここに書きます!文体も楽にしますので，突っ込まないでください!!)

(1.1) のような 2 階楕円型偏微分方程式の境界値問題の精度保証付き数値計算法は 1988 年に中尾充宏氏によって初めて提唱された [2]．特徴的な点は Sobolev 空間論の導入と不動点定理に基づく解の検証アルゴリズムの開発などがあげられる．中尾氏の研究を皮切りに 1991 年に Plum [3]，1995 年に大石 [4] がそれぞれ偏微分方程式を見据えた精度保証付き数値計算法を考案している．

現在は様々な手法が考案されているが根底である「Sobolev 空間論の導入と不動点定理を利用する」という点では変わりがない. では，手法の違いはどの様なところにでるか?という説明をする. 偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算を 3 つパートにわけると

- 与えられた問題の不動点方程式への定式化
- 利用する不動点定理の選定
- 不動点定理の十分条件を証明するためのノルムの具体的な評価法

である. 各手法とも微妙な差異はあるものの，現在では「不動点方程式への定式化」も，「利用する不動点定理の選定」もほぼ変わりがない. 一番の手法の違いがあらわれるのは「不動点定理を利用する際のノルムの評価法」である. (そのために，研究発表ではいきなり 3step 目の「ノルムの評価法」を始めるので，ふらっと「聴講しよう!」と思ったら「これは何の話だ?」ってなってしまうのかもしれませんね... 気を付けます...)

そのため，本講演では，基礎となる「不動点方程式への定式化」や「利用する不動点定理の選定」の現在よく利用される手法を紹介する. (といっても，分量を書きすぎたので，講演はエッセンスだけ紹介して，おしまいになると思います. すみません... なるべく詳しめに式変形は書いたつもりなので，ぜひ本稿を読んで偏微分方程式の精度保証付き数値計算法の導入を勉強いただけると幸いです!! 本稿で偏微分方程式の精度保証付き数値計算の肝がおわかりいただけたら，本稿には記載していない「不動点定理を利用する際のノルムの具体的な評価法」を書籍 [1] に記載してあるので，さらなる勉強に役立てて頂けると幸いです.)

2. 不動点定理と有限次元問題の練習問題

2.1 Schauder の不動点定理と Banach の不動点定理

ここでは，不動点定理を 2 つ紹介する. 不動点定理は不動点方程式として書かれた方程式の解の存在性や一意性を証明するために利用される定理である. (不動点定理の十分条件を満たす状況をつくれるか，偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算ではコンピュータも用いて確認します!)

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする. (つい忘れがちになるのですが，この X は解を探す根幹となる空間になるので非常に重要です!定常 Emden 方程式では $H_0^1(\Omega)$ として後に設定します.)

不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w) \tag{2.1}$$

に対して次の不動点定理が良く知られている. (定常 Emden 方程式 (1.1) を不動点方程式に書き換える方法はあとで示します!!)

定理 2.1 (Schauder の不動点定理) W を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする. $T : W \to W$ がコンパクト作用素であるとき，$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する.(一意性は言えません.)

定理 2.2 (Banach の不動点定理) W を Banach 空間 X の空でない閉集合とする. $T : W \to W$ に対し

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_X \le k\|w_1 - w_2\|_X, \ \forall w_1, w_2 \in W \tag{2.2}$$

となる定数 k が $0 \le k < 1$ を満たすとき，$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在し，一意である.

二つの定理に共通して現れる W は解を包み込むための集合である. (精度保証付き数値計算ではよく「候補者集合」と呼ばれています! W を作成して，不動点定理成り立つかな!?って確かめます!!) 偏微分方程式の精度保証付き数値計算で利用する際には W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球として作る. 実際に $W = \{w \in X | \|w\|_X \le \rho\}$ としてとる. (ρ は，真の解と近似解の差のノルムの上界になります!すなわち誤差ですね!!)

Schauder の不動点定理では，確かめなければならないことは

- 作用素 T の定義域を W としたとき，値域は W になりますか?($T : W \to W$)
- $T : W \to W$ はコンパクト作用素ですか?

の 2 点である. (条件 $T: W \to W$ はさらっと読み飛ばしがちになりますが，$T: W \to W$ を証明することがキツイんですよ! これをいうためにみんな必死に計算します!!)

また，Banach の不動点定理で確かめなければならないことは

- 作用素 T の定義域を W としたとき，値域は W になりますか?($T: W \to W$)
- $\|T(w_1) - T(w_2)\|_X \le k\|w_1 - w_2\|_X$, $\forall w_1, w_2 \in W$ を満たす k は 0 以上 1 未満ですか?

の 2 点である.

どちらの不動点定理の仮定にも表れる「[条件] : 作用素 T の定義域を W としたとき，値域は W になりますか?」を確かめる方法は「W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球」であることを利用して，

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\| \le \rho \tag{2.3}$$

をいう. (すなわち「定義域がゼロ中心の閉球」として，「定義域よりも内側に値域がきますね」ということをいいます. 候補者集合 W の半径 ρ の値をコンピュータで調整して，$T: W \to W$ が成り立つように設定します. 設定できなかったら，精度保証付き数値計算は失敗ですね.. (2.3) が成り立てば $T(W) \subset W$ がいえるので，ノルム評価だけ $T: W \to W$ が証明できますね!)

2.2 練習問題:連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算を Schauder の不動点定理で構築しよう!

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ とする. そのとき連立一次方程式

$$Ax = b$$

の解の精度保証付き数値計算法を (あえて)Schauder の不動点定理から導出する. 基本的な流れは偏微分方程式と変わらないため，良い練習問題となる. (もちろん連立一次方程式の精度保証付き数値計算法は様々な証明法があり，もっと簡単に証明できます! ただ，今回は偏微分方程式を見据えて練習問題としてあえて Schauder の不動点定理を使って証明します!!)

$X = \mathbb{R}^n$ とする. (しれっと書きましたが，これで，解を決定するための舞台が決まりました. そして，近似解を取ってきていい空間も $\mathbb{R}^n$ に決まりました.) 最終的にいいたいことは中心が近似解 $\hat{x}$ である半径 ρ の閉球 $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \le \rho\}$ に真の解 x^* が含まれることである. 閉球 U から中心である近似解 $\hat{x}$ を引いた，中心ゼロ・半径 ρ の閉球 $W := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \rho\}$ を候補者集合として考える. 即ち，$x^* - \hat{x}$ を未知変数として不動

点方程式化する. $w := x^* - \hat{x}$ とし，行列 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ を近似逆行列とすると

$$
\begin{aligned}
Ax^* &= b \\
Ax^* - A\hat{x} &= b - A\hat{x} \\
Aw &= b - A\hat{x} \\
0 &= R(b - A\hat{x}) - RAw \\
w &= R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w
\end{aligned}
$$

となる．その上，

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

とすると不動点方程式 $w = T(w)$ を得る. この不動点方程式に対して Schauder の不動点定理を利用する. (w をちょっと展開すると $x^* = \hat{x} - R(A\hat{x} - b) + (I - RA)w$ となります．よくよく考えると，$\hat{x} - R(A\hat{x} - b)$ は Newton 法と一致しますね! この考えを有限次元「非」線形方程式で考える場合は R は Jacobi 行列の近似逆行列として同じように変形し，平均値の定理を使ったり，なんやかんやの操作をすると Krawczyk 写像が得られます!! そのため，$R(A\hat{x} - b)$ を Newton 法の修正項と呼びます! また，余り物 $(I - RA)w$ も出てきますね．)

有限次元問題であるため T がコンパクトであることは明らかである. そのため，条件 (2.3) である $\sup_{w\in W} \|T(w)\| \le \rho$ が成り立つ ρ を見つければ良い. (これによって，$T(W) \subset (W)$ となる W の半径 ρ が決まりますよ. 条件を満たす ρ が見つかれば，$T : W \to W$ がいえるので，不動点定理の仮定の一つをいえますね!!) 実際に

$$
\begin{aligned}
\sup_{w\in W} \|R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w\| &\le \|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\| \sup_{w\in W} \|w\| \\
&\le \|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho
\end{aligned}
$$

となる. よって $\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho$ が ρ 以下となる ρ を見つければ良い. そのため，イコールが成り立つ条件を考えると

$$
\begin{aligned}
\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho &= \rho \\
\rho &= \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|}
\end{aligned}
$$

となる. その上，$0 \le \rho$ であるためには $\|I - RA\| < 1$ でなければならない.

まとめると $\|I - RA\| < 1$ ならば，不動点方程式 $w = R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$ を満たす真の解 w^* は

$$W := \left\{ w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$$

内に存在する. さらに，$w^* = u^* - \hat{u}$ であったことを思い出して，真の解 u^* についていうと $\|I - RA\| < 1$ ならば $Ax = b$ の真の解 u^* は

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \le \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$$

内に解が存在することがいえる．

連立一次方程式の場合は以下のような手順を得て検証条件を導出できた:

- $w = x^* - \hat{x}$ のように真の解と近似解の差を考える
- w に対する不動点方程式 $w = T(w)$ に変形する．
- 候補者集合 $W := \{w \in X \mid \|w\| \le \rho\}$ とし，不動点定理を適用
- $T : W \to W$ がいえる W，すなわち $T(W) \subset W$ を満たす ρ の条件を見つける

この作業は，半線形楕円型境界値問題でも変わらず,「不動点方程式への定式化」と「利用する不動点定理の選定」にあたる．

しかし，検証条件を得てから大きく変わる．連立一次方程式の場合は

- R を直接作成できる．
- 区間演算とコンピュータを用いて行列演算やノルムの上界が簡単に計算できる．

それに対し，偏微分方程式では無限次元問題となってしまうため，各ノルム評価を何とかして有限次元の問題に記述できるように，さらなる変形が必要となる. これが「ノルムの具体的な評価方法」の手順にあたる．(そして具体的なノルム評価が一番大変なので研究発表はここに焦点が当てられてしまいます．短時間の研究発表では「不動点方程式への定式化」と「利用する不動点定理の選定」は当たり前だよね!といった感じでささっと過ぎ去っていくと思います．)

2.3　近似解の条件

精度保証付き数値計算では便宜上，近似解と呼んでいることに注意する．例えば $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ に対する連立一次方程式 $Ax = b$ の解 x^* を例にとる. そのとき，近似逆行列 $R \approx A^{-1}$ をガウスの消去法などで作成し，$\hat{x} = Rb$ とすれば，$\hat{x}$ はもちろん近似解である. また，$\|I - RA\| < 1$ 未満ならば行列 A は逆行列を持ち $\|x^* - \hat{x}\| \le \frac{\|R(b-A\hat{x})\|}{\|I-RA\|}$ となることが知られている.

例えば，条件数が低い正方行列 A に対しガウスの消去法を真面目に用いてコンピュータで求めれば R はほぼ逆行列に近く $R \approx A^{-1}$ になり，$\|I - RA\| < 1$ を簡単に満たすだろう. よって十分条件である $\|I - RA\| < 1$ を満たすため誤差評価 $\|x^* - \hat{x}\|$ は計算できる. そのとき，たとえ，$\hat{x}$ は (適切という意味ではなく本当に) 適当な乱数でとったとしても精度保証付き数値計算はできる. ただし残差項 $b - A\hat{x}$ が非常に大きくなるため使い物になる誤差半径 $\|x^* - \hat{x}\|$ が得られるかどうかは別である. このように精度保証付き数値計算は近似解として乱数を持ってくることさえできる. (しかし，流石に $\hat{x}$ を $\mathbb{R}^n$ 以外からはとってきてはダメです! 解を探す空間を $\mathbb{R}^n$ にしていたら，$\mathbb{R}^n$ からとってこないとだめです. 大前提となる解を探す空間こそが 2.1 節の不動点定理の最初の設定である Banach 空間 X です!!)

偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算でも同じように近似解として，どこの空間か

ら構成するかは重要である. もし 2.1 節の解を探す空間 X を $H^1_0(\Omega)$ にした場合は近似解も $H^1_0(\Omega)$ に属さなければならない. (逆にいうと，それ以外には数学的な制約はありません! 技術的な制約はありますが...)

次に，$X = H^1_0(\Omega)$ して近似解に要求される技術的な制約を紹介する. 近似解が含まれる空間 V_h を基底関数で張られた $H^1_0(\Omega)$ の有限次元部分空間とする. (コンピュータで近似解を求められるように「有限次元」部分空間にしていますね. これも制限といえば制限ですね!) 直交射影 $\mathcal{R}_h : H^1_0(\Omega) \to V_h$ を，任意の $u \in H^1_0(\Omega)$ に対し

$$(u - \mathcal{R}_h u, \phi_h)_{H^1_0} = 0,\ \phi_h \in V_h \tag{2.4}$$

とする. (R_h はいわゆる Ritz 射影と呼ばれます.)

R_h について，

$$\|u - R_h u\|_{H^1_0} \le C_h \|\Delta u\|_{L^2},\ \forall u \in H^1_0(\Omega) \tag{2.5}$$

を満たす定数 C_h が存在し，具体的に得られる．(C_h はいわゆる射影誤差定数と呼ばれます. この定数 C_h の具体的な値が求まっている基底でないと精度保証付き数値計算ができません... 定数 C_h を条件から抜こうとすると非常に大変な議論が必要になってしまいますよ!! もし近似スキームを作る場合は，C_h も是非求めてください!)

Emden 方程式の場合の条件をまとめると:

- 近似解は $H^1_0(\Omega)(= X)$ に属する (条件の由来は不動点定理の設定).
- Ritz 射影 R_h に対して射影誤差定数 C_h が具体的に求まっている

3. 定常 Emden 方程式の不動点方程式への変形

定常 Emden 方程式の不動点方程式への変形方法を 2 パターン紹介する. 1 パターン目は練習問題であり，実用的ではない. 2 パターン目は無限次元 Newton 法を利用する実用的な方法である. 紹介する前の準備として，(1.1) を 1 つの式に書き直す．(Riesz の表現定理を使いますが，わからない場合はひとまずこんな風にできるんだっと思って読み飛ばして頂いて，(3.1) のように連立一次方程式っぽい書き方ができるんだ!って理解でとりあえず大丈夫です．非線形ではありますが...)

線形作用素 $\mathcal{A} : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle := (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

とする．線形作用素 $\mathcal{A}$ は $\|u\|_{H^1_0} = \|\mathcal{A}u\|_{H^{-1}},\ u \in H^1_0(\Omega)$ になることに注意する (すなわち等長同型写像ですね)．Gauss-Green の定理を用いて (1.1) を変形すると

$$\text{Find } u \in H^1_0(\Omega) \text{ s.t. } (\nabla u, \nabla v)_{L^2} = (u^2, v)_{L^2},\ v \in H^1_0(\Omega)$$

が得られる．さらに，$u \in H_0^1(\Omega)$ のとき，u^2 は

$$\|u^2\|_{L^2} \le \|u\|_{L^4}^2 \le C\|u\|_{H_0^1}^2 < \infty$$

となるため，$L^2(\Omega)$ に属する．そのため，$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ であるため，u^2 は $H^{-1}(\Omega)$ にも属する．よって，

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2 \tag{3.1}$$

と変形できる．

3.1 実用的ではない練習のための方法

ここでは練習のために良くない不動点方程式への変形を導出します．真の解 u^* と近似解 $\hat{u}$ とし，$w = u^* - \hat{u}$ に対する不動点方程式を導出する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}u^* &= u^{*2} \\
\mathcal{A}u^* - \mathcal{A}\hat{u} &= u^{*2} - \mathcal{A}\hat{u} \\
\mathcal{A}w &= (w + \hat{u})^2 - \mathcal{A}\hat{u} \\
\mathcal{A}w &= ((w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2) - \mathcal{A}\hat{u} + \hat{u}^2 \\
w &= -\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right) + \mathcal{A}^{-1}\left((w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2\right)
\end{aligned}$$

そこで，$X = H_0^1(\Omega)$ とし，

$$T(w) := -\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right) + \mathcal{A}^{-1}\left((w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2\right)$$

とし，候補者集合 W を

$$W := \{w \in H_0^1(\Omega) \mid \|w\|_{H_0^1} \le \rho\}$$

とし Banach の不動点定理を考える．(またもや，しれっと書きましたが，$X = H_0^1(\Omega)$ で，解を決定するための舞台が決まりました. そして，近似解を取ってくる空間も $H_0^1(\Omega)$ に決まりましたね.)

そのために，まず最初に 1 つ目の条件 $\sup_{w\in W}\|T(w)\|_{H_0^1} \le \rho$ を満たす ρ を考える:

$$\begin{aligned}
\sup_{w\in W}\|T(w)\|_{H_0^1} &\le \sup_{w\in W}\left(\left\|\hat{u} - \mathcal{A}^{-1}\hat{u}^2\right\|_{H_0^1} + \left\|\mathcal{A}^{-1}\left((w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2\right)\right\|_{H_0^1}\right) \\
&\le \left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + \sup_{w\in W}\left(\left\|w^2\right\|_{H^{-1}} + 2\left\|\hat{u}w\right\|_{H^{-1}}\right)
\end{aligned}$$

を得る．さらに，(付録 A.2) や (付録 A.3) を用いると

$$
\begin{aligned}
\sup_{w\in W}\|T(w)\|_{H_0^1} &\le \left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + C_2\sup_{w\in W}\left(\left\|w^2\right\|_{L^2}+2\|\hat{u}w\|_{L^2}\right)\\
&\le \left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + C_2\sup_{w\in W}\left(\|w\|_{L^4}^2+2\|\hat{u}\|_{L^4}\|w\|_{L^4}\right)\\
&\le \left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + C_2C_4^2\sup_{w\in W}\left(\|w\|_{H_0^1}^2+2\|\hat{u}\|_{H_0^1}\|w\|_{H_0^1}\right)\\
&\le \left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + C_2C_4^2\left(\rho^2+2\|\hat{u}\|_{H_0^1}\rho\right)
\end{aligned}
$$

となる．$\left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}}$ は $H^{-1}(\Omega)$ の残差ノルムと呼ばれ，計算方法がいくつかある．($\hat{u}$ が十分にいい近似解ならば，残差ノルムは小さくなります!) その上で，Banach の不動点定理の十分条件を満たすには，

$$
0 \le C_2C_4^2\rho^2 + 2C_2C_4^2\|\hat{u}\|_{H_0^1}\rho + \left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} \le \rho
$$

x となる ρ が存在することである．本来は条件を出したらコンピュータで上記を満たす ρ を探すが，今回の問題では二次不等式なので高校生の数学で解ける. (というか，二次不等式になるから，わざと定常 Emden 方程式を選んだのです!! 別の問題だと二次不等式にはなるとは限りませんよ!!) まず，二次方程式の

$$
C_2C_4^2x^2 - (1-2C_2C_4^2\|\hat{u}\|_{H_0^1})x + \left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} = 0
$$

解 x を求める. 判別式 $D := (2C_2C_4^2\|\hat{u}\|_{H_0^1}-1)^2 - 4C_2C_4^2\left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}}$ とすると，実数に解が 1 つ以上を持つ条件は $D \ge 0$ である. その上で，二次方程式の解の公式に当てはめると

$$
x = \frac{1-2C_2C_4^2\|\hat{u}\|_{H_0^1} \pm \sqrt{D}}{2C_2C_4^2}
$$

となり，ρ の範囲は

$$
\rho \in \left[\frac{1-2C_2C_4^2\|\hat{u}\|_{H_0^1} - \sqrt{D}}{2C_2C_4^2}, \frac{1-2C_2C_4^2\|\hat{u}\|_{H_0^1} + \sqrt{D}}{2C_2C_4^2}\right] \cap \mathbb{R}_+ \tag{3.2}
$$

となる. (ここまでの検証の失敗条件は，「$D<0$」と上記の集合が「空集合」になったらです...)

続いて，縮小写像の条件である「$\|T(w_1)-T(w_2)\|_{H_0^1} \le k\|w_1-w_2\|_{H_0^1}$, $\forall w_1, w_2 \in W$ を満

たす k は 0 以上 1 未満」になる ρ の条件を考える．

$$\begin{aligned}
\|T(w_1)-T(w_2)\|_{H_0^1} &= \left\|\mathcal{A}^{-1}\left((w_1+\hat{u})^2-(w_2+\hat{u})^2\right)\right\|_{H_0^1} \\
&= \left\|w_1^2+2\hat{u}w_1-w_2^2-2\hat{u}w_2\right\|_{H^{-1}} \\
&\le \|(w_1+w_2)(w_1-w_2)\|_{H^{-1}}+2\,\|\hat{u}(w_1-w_2)\|_{H^{-1}} \\
&\le C_2\,\|(w_1+w_2)(w_1-w_2)\|_{L^2}+2C_2\,\|\hat{u}(w_1-w_2)\|_{L^2} \\
&\le C_2\,\|w_1+w_2\|_{L^4}\,\|w_1-w_2\|_{L^4}+2C_2\,\|\hat{u}\|_{L^4}\,\|w_1-w_2\|_{L^4} \\
&\le C_2C_4^2\,\|w_1+w_2\|_{H_0^1}\,\|w_1-w_2\|_{H_0^1}+2C_2C_4^2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}\,\|w_1-w_2\|_{H_0^1} \\
&\le C_2C_4^2\left(\left(\|w_1\|_{H_0^1}+\|w_2\|_{H_0^1}\right)+2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}\right)\|w_1-w_2\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$w_1, w_2 \in W$ だったことを思い出すと $\|w_1\|_{H_0^1} \le \rho$, $\|w_2\|_{H_0^1} \le \rho$ を満たす．よって

$$\|T(w_1)-T(w_2)\|_{H_0^1} \le 2C_2C_4^2\left(\rho+2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}\right)\|w_1-w_2\|_{H_0^1}$$

となる．そのため，Banach の不動点定理を成立するためには

$$2C_2C_4^2\left(\rho+2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}\right)<1$$

も満たさなければならない．

以上をまとめると判別式

$$(2C_2C_4^2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}-1)^2-4C_2C_4^2\left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} \ge 0$$

で，かつ (3.2) と組み合わせた条件

$$\begin{aligned}
\rho &\ge \frac{1-2C_2C_4^2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}-\sqrt{D}}{2C_2C_4^2} \\
\rho &\le \frac{1-2C_2C_4^2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}+\sqrt{D}}{2C_2C_4^2} \\
0 &\le \rho \\
2C_2C_4^2\left(\rho+2\,\|\hat{u}\|_{H_0^1}\right) &< 1
\end{aligned}$$

を満たす ρ が見つかれば, Banach の不動点定理より候補者集合 $W := \{w \in H_0^1(\Omega) \mid \|w\|_{H_0^1} \le \rho\}$ 内に不動点方程式 $w = T(w)$ を満たす解がただ一つ存在することがいえる．よって真の解 u^* は

$$U = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u-\hat{u}\|_{H_0^1} \le \rho\}$$

内にただ一つ存在することが証明できる．(「ρ を探すにはどうすればいいのか」と思うかもしれませんが，for 文を用いて，ρ の値を例えば適当に 0.01 ずつ増やして試すと取り敢えずは OK です．)

あくまでこの評価はダメな評価法である．理由は $T(w)$ を見ればわかる．$T(w)$ は

$$T(w) = -\mathcal{A}^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right) + \mathcal{A}^{-1}\left((w+\hat{u})^2 - \hat{u}^2\right)$$

であったが，第 1 項目は Newton 法の修正項に近くなければならない．Newton 法の修正項となるためには $\mathcal{A}^{-1}$ ではなく，Jacobi 行列の無限次元版にあたる Fréchet 微分の逆作用素 (通称:線形化作用素の逆作用素) が必要である．Fréchet 微分の逆作用素が $\mathcal{A}^{-1}$ に近い問題であれば，Newton 法の二次収束性がよく効き縮小写像であることがいいやすい．しかし，$\mathcal{A}^{-1}$ に近い問題は非線形項の効果が少ない「簡単」な問題なので，あまりこの方法は役に立たない．(簡易 Newton 法ならぬ，簡易すぎる Newton 法であるため，評価が悪くなってしまいました．ただ，複雑な評価がなく，簡単なので偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算法の「流れ」はきっとわかって頂けると思います!)

3.2 無限次元 Newton 法を導入した方法

つづいて無限次元 Newton 法を導入した方法を紹介する．現在，最も主流な方法である．Newton 法として考えるためにまず問題 (3.1) である $\mathcal{A}u = u^2$ を $\mathcal{F}(u) = 0$ のような形に書き換えて，必要な Fréchet 微分が何か考えてみる．もちろん $\mathcal{F}(u)$ を

$$\mathcal{F}(u) := \mathcal{A}u - u^2$$

と定義すれば，$\mathcal{F}(u) = 0$ に書き直せる．

$\mathcal{F}(u)$ の $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ における Fréchet 微分を考える．(といっても，とりあえず，こんな形かな?って想像してから Fréchet 微分の定義式にあてはめて，大丈夫だ!と確かめると良いですね! $\mathcal{A}u$ は線形項なので，$\mathcal{A}$ が残りそう，u^2 は高校のときに習った微分則を何となく使ってみると $2u$ となるので，u を「どの点での微分」のどの点にあたる $\hat{u}$ に置き換えてみます．そうすると，何となく $\hat{u}$ における Fréchet 微分は $\mathcal{A} - 2\hat{u}$ かなって想像がつきます．最後にきっちりと定義式に当てはめて確認すれば Fréchet 微分の完成です!!)

$\mathcal{F}(u)$ の $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ における Fréchet 微分を

$$\mathcal{F}'[\hat{u}] := \mathcal{A} - 2\hat{u}$$

と書き，不動点方程式を導出する．(Fréchet 微分 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ は「線形化作用素」と呼ばれます．線形化作用素というワードは研究発表でもよく出てくるワードなので，是非覚えておいて下さい!!) その際に重要な条件

$$\text{(条件 1)}\ \ \mathcal{F}'[\hat{u}]\ \text{は正則}$$

であることを仮定する．途中までの式変形は 3.1 節と同じように誤差 $w = u^* - \hat{u}$ として

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}u^* &= {u^*}^2 \\
\mathcal{A}w &= (w+\hat{u})^2 - \mathcal{A}\hat{u} \\
\mathcal{A}w &= ((w+\hat{u})^2 - \hat{u}^2) - \mathcal{A}\hat{u} + \hat{u}^2
\end{aligned}$$

とする．ここで，$\mathcal{A}^{-1}$ とせずに，$-2\hat{u}w$ を両辺に加える:

$$\mathcal{A}w - 2\hat{u}w = ((w+\hat{u})^2 - \hat{u}^2) - \mathcal{A}\hat{u} + \hat{u}^2 - 2\hat{u}w$$

そうすると左辺は $\mathcal{F}(u)$ の $\hat{u}$ における Fréchet 微分 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ になる．即ち

$$\mathcal{F}'[\hat{u}]w = ((w+\hat{u})^2 - \hat{u}^2) - \mathcal{A}\hat{u} + \hat{u}^2 - 2\hat{u}w$$

となる．さらに，右辺を変形すると

$$\mathcal{F}'[\hat{u}]w = -\mathcal{A}\hat{u} + \hat{u}^2 + w^2$$

(このときに，右辺は w について一次の項 $-2\hat{u}w$ が消えることが二次収束のポイントです!! 実際に $(w+\hat{u})^2 - \hat{u}^2 = w^2 + 2\hat{u}w$ ですので，残差項 $-\mathcal{A}\hat{u} + \hat{u}^2$ と w^2 しか残りませんね!!)

さらに，仮定である $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ の正則性を使うと

$$w = -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

となり，$T(w)$ を

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

と定義すれば，不動点方程式 $w = T(w)$ を得る．(今度の不動点方程式は Newton 法の修正項 $\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right)$ がちゃんと入っていますね!! そのかわり線形化作用素の逆作用素 $\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}$ は直接計算できません...)

候補者集合 W を

$$W := \{w \in H_0^1(\Omega) \mid \|w\|_{H_0^1} \le \rho\}$$

とし Banach の不動点定理を考える．そのために，まず最初に条件 $\sup_{w\in W}\|T(w)\|_{H_0^1} \le \rho$ を満たす ρ を考える:

$$\begin{aligned}\sup_{w\in W}\|T(w)\|_{H_0^1} &\le \sup_{w\in W}\left(\left\|-\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2\right\|_{H_0^1}\right)\\ &\le \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right)\right\|_{H_0^1} + \sup_{w\in W}\left(\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2\right\|_{H_0^1}\right)\end{aligned}$$

を得る．さらに $\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}$ は今のところ直接的に計算する方法がわからないできないため，作用素ノルム $\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\|_{L(H^{-1},H_0^1)}$ をつかってノルムを分けると

$$\begin{aligned}\sup_{w\in W}\|T(w)\|_{H_0^1} &\le \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + \sup_{w\in W}\left(\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\left\|w^2\right\|_{H^{-1}}\right)\\ &\le \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)} C_2C_4\rho^2\end{aligned}$$

となる．よって，

$$(\text{条件 } 2)\quad 0 \le \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + C_2C_4\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\rho^2 \le \rho$$

を満たす ρ を探せば良い．

H^{-1} の残差ノルム $\left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}}$ は 3.1 節と同じく色々な計算方法があり，(頑張って) コンピュータで計算する．(そして，偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算法で良く名前が出てくる線形化作用素の逆作用素のノルム評価 $\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}$ がついに出てきましたね!現在では線形化作用素の逆作用素のノルム評価が手法の分かれ目です．そして一番難しい!!)

続いて，縮小写像の条件である「$\|T(w_1)-T(w_2)\|_{H_0^1} \le k\|w_1-w_2\|_{H_0^1}$, $\forall w_1, w_2 \in W$ を満たす k は 0 以上 1 未満」になる ρ の条件を考える.(とはいっても 3.1 節の結果を流用できます!)

$$\begin{aligned}\|T(w_1)-T(w_2)\|_{H_0^1} &= \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(w_1^2-w_2^2\right)\right\|_{H_0^1}\\ &\le \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\|(w_1+w_2)(w_1-w_2)\|_{H^{-1}}\\ &\le 2C_2C_4^2\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\|w_1-w_2\|_{H_0^1}\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\text{(条件 3)}\ \ 2C_2C_4^2\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)} < 1$$

を満たせば T が縮小写像であることを示せる．

以上をまとめると

$$\begin{aligned}&\text{(条件 1)}\ \ \mathcal{F}'[\hat{u}] \text{ は正則}\\ &\text{(条件 2)}\ \ 0 \le \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\|_{H^{-1}} + C_2C_4\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)}\rho^2 \le \rho\\ &\text{(条件 3)}\ \ 2C_2C_4^2\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\|_{L(H^{-1},H_0^1)} < 1\end{aligned}$$

が成り立つ ρ があれば，Banach の不動点定理より $w = T(w)$ を満たす解が候補者集合 W 内に一意に存在することがいえる．

4. 練習問題:偽 Newton-Kantorovich like theorem を導出しよう!

3.2 節では Emden 方程式に対して解の精度保証付き数値計算法を導出する方法を解説した．このままでは機械的な操作ではあるが，毎回求めるのは面倒なので，一般的な状況下で使えるようになっている定理として偽 Newton-Kantorovich like theorem を紹介する．(とはいっても本質は何も変わりません!!) 偽 Newton-Kantorovich like theorem は 3.2 節と同じ流れで証明できる．

一般的な楕円型偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases}-\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \partial\Omega,\end{cases}\tag{4.1}$$

とし，$f : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ を考える. このとき，f は Fréchet 微分可能とし，f の $\hat{u} \in H^1_0(\Omega)$ における Fréchet 微分を $f'[\hat{u}] : H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ と記述する. (Frécht 微分は具体的な問題が決まらないと決まりません. 具体的な問題が与えられてから考えましょう!)

3.2 節と同様に，Banach の不動点定理を利用するために，$\mathcal{F}(u)$ を

$$\mathcal{F}(u) := \mathcal{A}u - f(u)$$

とし，

$$\text{Find } u \in H^1_0(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{F}(u) = 0 \tag{4.2}$$

を考える.

また，$\mathcal{F}(u)$ の $\hat{u} \in H^1_0(\Omega)$ における Fréchet 微分を

$$\mathcal{F}'[\hat{u}] := \mathcal{A}u - f'[\hat{u}]$$

と書く. そのとき，次の定理が成り立つ:

定理 4.1 (偽 Newton-Kantorovich like theorem) $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ を正則とする. 正の定数 α を

$$\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\mathcal{F}(\hat{u})\|_{H^1_0} \le \alpha$$

とする. ρ を正の定数とし，候補者集合 W を

$$W := \left\{ w \in H^1_0(\Omega) \mid \|w\|_{H^1_0} \le \rho \right\}$$

とする. さらに関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\sup_{w \in W} \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} \left(f'[\hat{u}] + f(\hat{u}) - f(\hat{u} + w) \right) \|_{H^1_0} \le g(\rho) \tag{4.3}$$

とし，関数 $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\sup_{w_1, w_2 \in W} \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} \left(f'[\hat{u}](w_1 - w_2) - f(\hat{u} + w_1) + f(\hat{u} + w_2) \right) \|_{H^1_0} \le G(\rho) \|w_1 - w_2\|_{H^1_0} \tag{4.4}$$

とする. もし，

$$\alpha + g(\rho) \le \rho \ \text{ and } \ G(\rho) < 1$$

を満たす正の ρ が存在すれば，Banach の不動点定理より，$\mathcal{F}(u) = 0$ を満たす解 u^* は $\hat{u} + W$ 内に一意に存在する.

証明のヒント:
1) 3.2 節と同じように $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ を用いて $T(w)$ を定義し，不動点方程式 $w = T(w)$ を作成して下さい.

2) Banach の不動点定理を利用するための条件「$\sup_{w\in W}\|T(w)\|\le\rho$」を作成してみて下さい.$\alpha$ と $g(\rho)$ で書けるはずです.
3) Banach の不動点定理を利用するための条件「$\|T(w_1)-T(w_2)\|_X\le k\|w_1-w_2\|_X,\ \forall w_1,w_2\in W$ となる k が 1 未満」を考えてみて下さい.$G(\rho)$ で書けるはずです.
4) ここまで来たら簡単ですよね?もう w に対する不動点方程式で Banach の不動点定理が使えます. あとは，u と w の関係を考えて...

さらに余力がある人は...

ここで「偽」Newton-Kantorovich-like theorem と呼んだ理由は，Plum 先生が利用する Newton-Kantorovich-like theorem までは，あと一段階，式変形が必要だからです．とはいっても，イコールの式変形だけです. 平均値の定理を (4.3) と (4.4) に使うだけでおしまいです. (評価の良し悪しには影響がなく，単に式が短くなるだけです. 具体的には (4.3) には $f(\hat{u})-f(\hat{u}+w)$ に (積分バージョンの) 平均値の定理を使ってください．さらに，(4.4) には $-f(\hat{u}+w_1)+f(\hat{u}+w_2)$ に (積分バージョンの) 平均値の定理を使ってください. 答えは論文 [5] を参照!)

同じように Newton-Kantorovich の定理や，中尾法 IN-Linz も無限次元 Newton に基づいている.

定理 4.1 では，5 つのことを要求している:
1) $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ を正則
2) $\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\mathcal{F}(\hat{u})\|_{H_0^1}\le\alpha$
3) $\sup_{w\in W}\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(f'[\hat{u}]+f(\hat{u})-f(\hat{u}+w)\right)\|_{H_0^1}\le g(\rho)$
4) $\sup_{w_1,w_2\in W}\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\left(f'[\hat{u}](w_1-w_2)-f(\hat{u}+w_1)+f(\hat{u}+w_2)\right)\|_{H_0^1}\le G(\rho)$
5) $\alpha+g(\rho)\le\rho\ \text{ and }\ G(\rho)<1$

実際に精度保証付き数値計算を行う際には $\alpha, g(\rho), G(\rho)$ を求めるために，線形化作用素の逆作用素のノルム評価

$$\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\|_{X,H_0^1},$$

X は $L^2(\Omega)$ や $H^{-1}(\Omega)$ と設定して，ノルムをわけなければ計算できない．(そして，ノルムをわけて問題が少し簡単になったとはいえ，線形化作用素の逆作用素のノルム評価を如何に得るかが重要な課題となります．そして一番難しい...)

付録 A.　関数解析の予備知識

A.1　Banach 空間の定義

本節である付録 A.1 の定義だけで Banach の不動点定理が証明できます. 時間があるかたはチャレンジしてみましょう!!

定義 付録 A.1 (ノルムとノルム空間の定義) X を係数体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．X で定義された関数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ が X のノルムであるとは

(i) $\|u\| \geq 0,\ u \in X$

(ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(iii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|,\ (\alpha \in \mathbb{K},\ u \in X)$

(iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

が成立することである．さらに X に一つのノルムが指定されているとき，X はノルム空間という．

定義 付録 A.2 (ノルム空間の収束と極限) X をノルム空間とする．X の点列 (x_n) が収束が点 $x \in X$ に収束するとは

$$\|x_n - x\| \to 0,\ (n \to \infty)$$

が成立することである．このとき x を x_n の極限といい

$$x_n \to x,\ (n \to \infty)$$

と書く．

定義 付録 A.3 (Cauchy 列) X をノルム空間とする．そのとき X の点列 (x_n) が *Cauchy* 列であるとは

$$x_n - x_m \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．即ち

$$\|x_n - x_m\| \ \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

が成立することである．

定義 付録 A.4 (完備) X をノルム空間とする．X が完備であるとは，任意の *Cauchy* 列が X の中で極限を持つことである．

定義 付録 A.5 (Banach 空間) ノルム空間 X が *Banach* 空間であるとは，X が完備であることである．

定義 付録 A.6 (ノルム空間の閉集合) X をノルム空間とし，Y を X の部分集合とする．Y が閉集合であるとは，Y の任意の点列 (x_n) が $x \in X$ に収束すれば，x は Y に属することである．

A.2　$L^p(\Omega)$ 空間と $H^1_0(\Omega)$ 空間の定義

$L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ は Lebesgue p 乗可積分可能な関数空間とする．$p = 2$ について，内積 $(u,v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)v(x)dx$ とし，内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_{L^2} := \sqrt{(\cdot,\cdot)_{L^2}}$ とする．正のある実数 s について $H^s(\Omega)$ は s 階の L^2-Sobolev 空間とする．

関数空間 $H^1_0(\Omega)$ を $H^1_0(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とし，その内積を

(付録 A.1)
$$(\cdot,\cdot)_{H^1_0} := (\nabla\cdot,\nabla\cdot)_{L^2}$$

とする．また，内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_{H^1_0} := \sqrt{(\cdot,\cdot)_{H^1_0}}$ とする．$H^{-1}(\Omega)$ を $H^1_0(\Omega)$ の共役空間とする．$T \in H^{-1}(\Omega)$ と $u \in H^1_0(\Omega)$ について，$\langle T,u\rangle$ によって共役対を表す．また，$T \in H^{-1}(\Omega)$ のノルムを

$$\|T\|_{H^{-1}} := \sup_{u\in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle T,u\rangle|}{\|u\|_{H^1_0}}$$

とする．

X,Y を Banach 空間とする．$L(X,Y)$ を有界線形作用素の集合とし，そのノルムを $\|\mathcal{T}\|_{L(X,Y)} := \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \|\mathcal{T}u\|_Y/\|u\|_X$, $\mathcal{T} \in L(X,Y)$ とする．

A.3　Sobolev の埋め込み定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ から Sobolev の埋め込み定理より $p \in [2,\infty)$ において $H^1_0(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ に埋め込まれ，

(付録 A.2)
$$\|u\|_{L^p} \le C_p\|u\|_{H^1_0} \text{ for } u \in H^1_0(\Omega)$$

を満たす定数 $C_{p,\sigma}$ が存在する．例えば，$\Omega = (0,1)^2$ の場合は

$$\begin{aligned} &C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \\ &C_3 \in [0.25712475017618, 0.25712475017620] \\ &C_4 \in [0.28524446071925, 0.28524446071929] \end{aligned}$$

となることが知られている. 同様に

(付録 A.3)
$$\|u\|_{H^{-1}} \le C_2\|u\|_{L^2} \text{ for } u \in H^1_0(\Omega)$$

が成り立つことにも注意する．一般的な領域についても様々な方法が知られている．

A.4　Fréchet 微分の定義と平均値の定理

定義 付録 A.7 (連続) X, Y を *Banach* 空間とし，U を X の開部分集合とする．写像 $F : U \to Y$ とする．任意の U の点列 (x_n) が $x_0 \in U$ に収束すると仮定する．そのとき，F が x_0 において連続であるとは $F(x_n) \to F(x_0)$, $x_n \to x_0$ が成立するときである．さらに U 上の各点において連続であるとき，F は U 上で連続であるという．

定義 付録 A.8 (Fréchet 微分) X と Y を *Banach* 空間とし，それらのノルムを $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ とかく. U を X の開部分集合とし，$\mathcal{F} : U \to Y$ を連続な作用素とする. ある点 $v \in U$ に対し，$v + h \in U$ となる任意の $h \in X$ について，線形作用素 $A : X \to Y$ が存在し

$$\frac{\|\mathcal{F}(v+h) - \mathcal{F}(v) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0,\ (h \to 0)$$

を満たすとき，作用素 $\mathcal{F}$ は点 v において *Fréchet* 微分可能といい，A を $\mathcal{F}$ の点 v における *Fréchet* 微分と呼ぶ. *(*すなわち，$\mathcal{F}'[v] := A$ ですね*!)*

定理 付録 A.1 (平均値の定理) X, Y を Banach 空間とし，U を X の開部分集合とする．作用素 $F : U \to Y$ とし，任意の $v \in U$ において Fréchet 微分可能であるとする．$u, v \in U$ とし，

$$w(t) = (1-t)u + tv,\ t \in [0,1]$$

が U に属すると仮定する．そのとき，

$$F(v) - F(u) = \int_0^1 F'[(1-t)u + tv](v-u)dt$$

となる．

(平均値の定理を使って，本物の Newton-Kantorovich like theorem を導いてくださいね!)

付録 B.　参考にしたおすすめ本の紹介

私が一番最初に関数解析を勉強したの書籍 [6] は家と研究室のどちらにも置いときき，いつでも参照できるようにしています. 関数解析をじっくり/しっかり勉強したいというかたには強くお勧めです.(ただ，こんないい本が何故か絶版，時々再版を繰り返すので，再版したときにすぐに購入がおすすめ!)

次に，よく参考にする書籍が [7] です.「楕円型偏微分が研究対象だから放物型発展方程式は関係ないよ」ってつい言ってしまいがちですが,「空間の 3 つの組」と「線形作用素の部分」を定義して，弱いラプラシアンから強いラプラシアンを表す理論展開は非常にきれ

い! 3 つの空間の組「$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$」と「$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$」がおりなす理論は楕円型偏微分方程式もきれいに見えてきますよ!! (そのほかにも，Fréchet 微分の定義も参考にしました. 特に h のとりかたまで，厳密に書かれている書籍は数少ない!!)

不動点定理を勉強したい場合は書籍 [8] が「比較的薄いので」おすすめです. 1 から読んで Schauder の不動点定理や Banach の不動点定理の証明を勉強しようってかたは 1 章を読むだけ済むので手っ取り早いです. (そして，「付録 A.1 の定義のみで Banach の不動点定理の証明ができる」の答え合わせにも使えます!)

偏微分方程式の精度保証付き数値計算を見据えて関数解析を勉強するには書籍 [9] もおすすめです. Banach 空間の定義から始まり，有限次元と無限次元の差の説明，線形作用素の理論，非線形作用素の理論，さらに精度保証付き数値計算で重要となる Krawczyk 法まで記載されています. (特にコラムに書いてある「最初は証明を読まなくてよい」に何度救われたことか...)

偏微分方程式の精度保証付き数値計算自身を勉強するには書籍 [10] もおすすめです. 本稿では無限次元 Newton 法を紹介しました. 書籍 [10] では無限次元 Newton 法は IN-Linz にあたるパートです. (また IS-Res は，本稿の 3.1 節に近い手法です.) 無限次元 Newton 法に行きつくまでに，様々な手法が考案されおり偏微分方程式の精度保証付き数値計算の歴史を感じる書籍になっています.

参考文献

[1] 大石進一: 精度保証付き数値計算の基礎, コロナ社 (2018).

[2] M.T. Nakao: A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan J. Indust. Appl. Math. 5, pp.313–332 (1988).

[3] M. Plum: Computer-assisted existence proofs for two-point boundary value problems, Computing. 46, pp.19–34 (1991).

[4] S. Oishi: Numerical verification of existence and inclusion of solutions for nonlinear operator equations, J. Comput. Appl. Math. 60, pp.171–185 (1995).

[5] M. Plum: Computer-assisted proofs for semilinear elliptic boundary value problems, Japan J. Indust. Appl. Math. 26, 2-3, pp.419-442 (2009).

[6] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三: 関数解析, 岩波書店 (1991).

[7] 八木厚志: 放物型発展方程式とその応用 (上), 岩波書店 (2011).

[8] E. Zeidler: Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics, Springer (1999).

[9] 大石進一: 非線形解析入門, コロナ社 (1997).

[10] 中尾充宏, 渡部善隆: 実例で学ぶ精度保証付き数値計算:理論と実装, サイエンス社 (2011).