偏微分方程式の精度保証付き数値計算法(II)
～半線形楕円型境界値問題～

東洋大学 情報連携学部　関根 晃太

楕円型偏微分方程式の境界値問題

楕円型偏微分方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の計算機援用存在証明法の解説をします.

楕円型偏微分方程式の境界値問題

楕円型偏微分方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の計算機援用存在証明法の解説をします.

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

作用素方程式

$$F(u) = 0$$

楕円型偏微分方程式の境界値問題

楕円型偏微分方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の計算機援用存在証明法の解説をします.

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

作用素方程式

$$F(u) = 0$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

楕円型偏微分方程式の境界値問題

楕円型偏微分方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の計算機援用存在証明法の解説をします.

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

作用素方程式

$$F(u) = 0$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

③評価

・線形化作用素の
　逆作用素のノルム評価

・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

楕円型偏微分方程式の境界値問題

楕円型偏微分方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

今回のメインテーマ

の解の計算機援用存在証明法の解説をします.

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

作用素方程式

$$F(u) = 0$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

③評価

・線形化作用素の
 逆作用素のノルム評価

・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

楕円型偏微分方程式の境界値問題

歴史:

有限次元
Newton法

無限次元
Newton法

線形化作用素
逆作用素ノルム

楕円型偏微分方程式の境界値問題

歴史：

1988年
中尾充宏先生
FS-Int

有限次元
Newton法

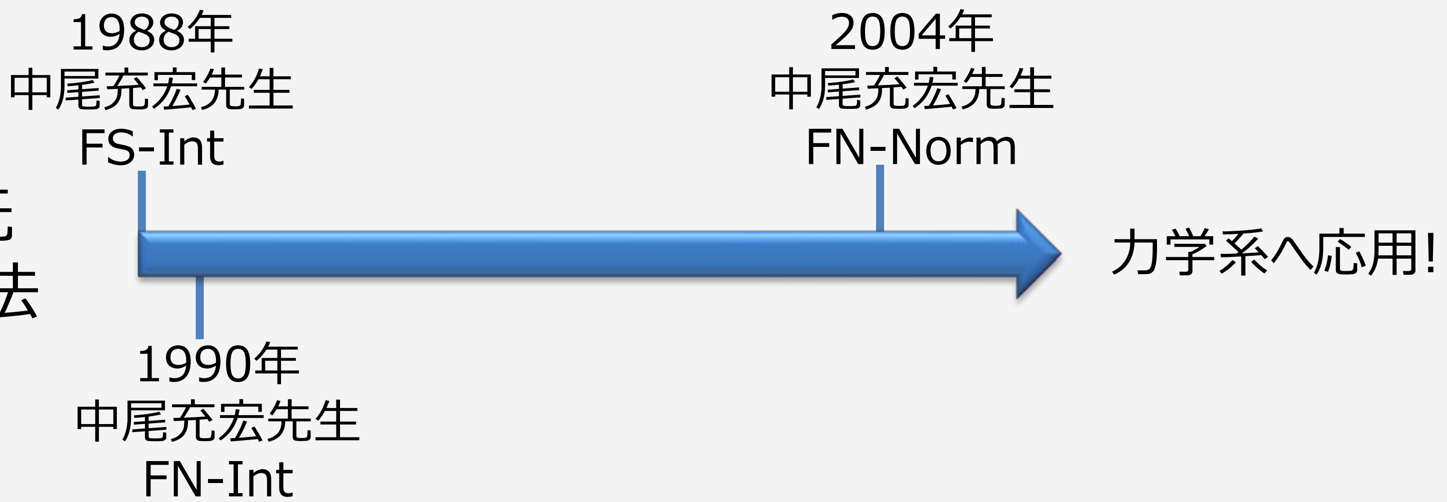
無限次元
Newton法

線形化作用素
逆作用素ノルム

楕円型偏微分方程式の境界値問題

歴史:

有限次元
Newton法



無限次元
Newton法
線形化作用素
逆作用素ノルム

楕円型偏微分方程式の境界値問題

歴史:

有限次元
Newton法

1988年
中尾充宏先生
FS-Int

1990年
中尾充宏先生
FN-Int

2004年
中尾充宏先生
FN-Norm

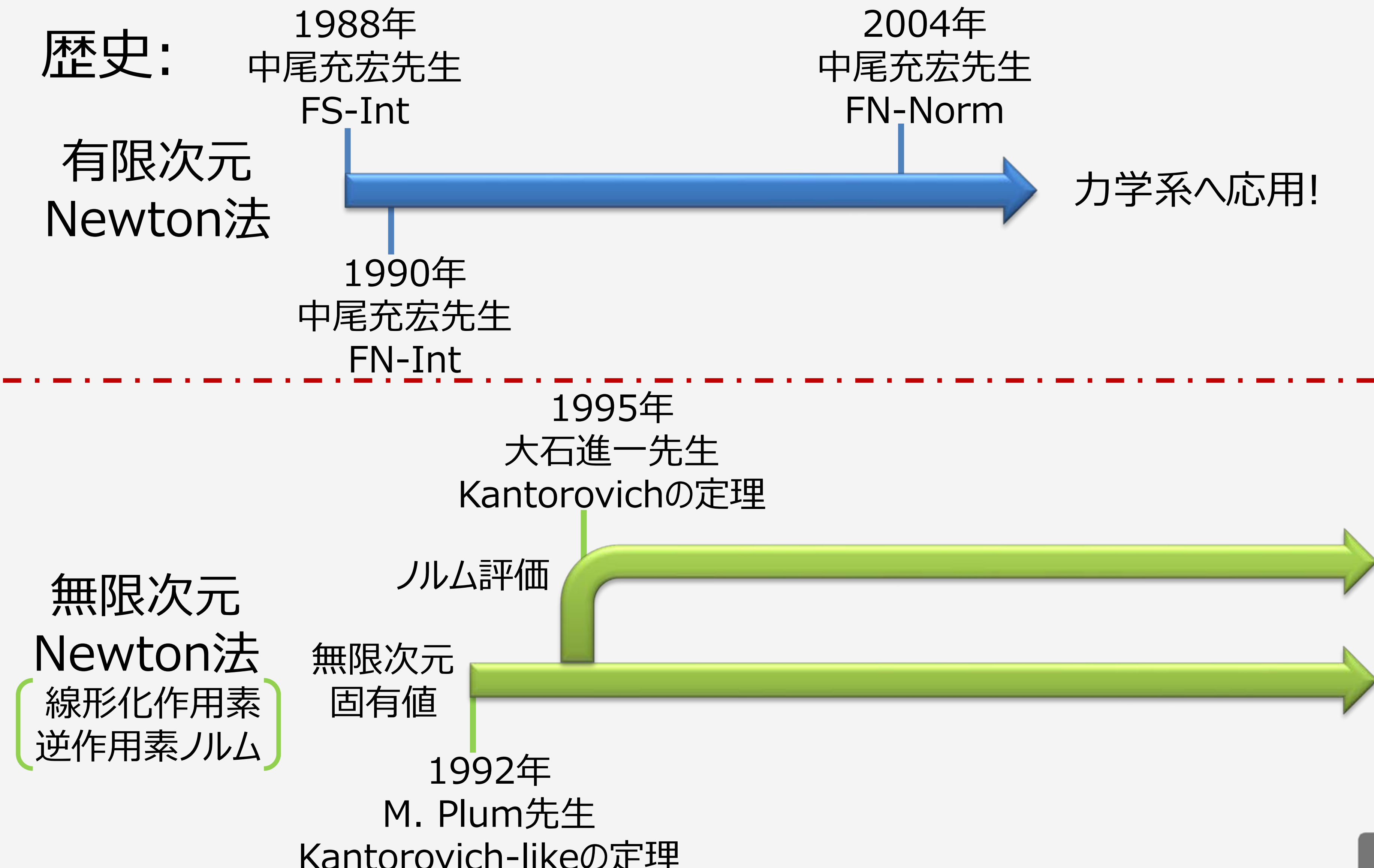
力学系へ応用!

無限次元
Newton法
（線形化作用素
逆作用素ノルム）

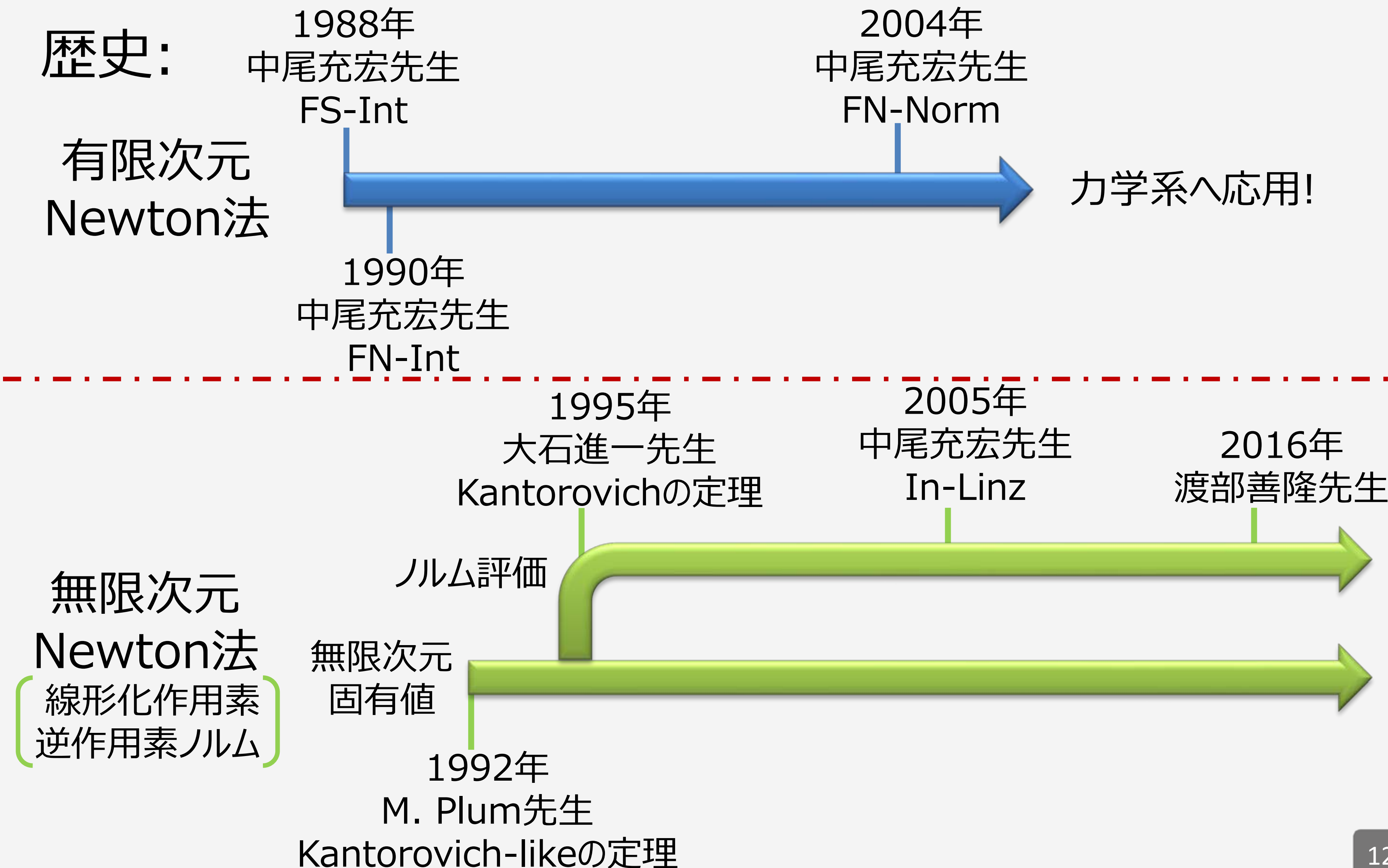
無限次元
固有値

1992年
M. Plum先生
Kantorovich-likeの定理

楕円型偏微分方程式の境界値問題



楕円型偏微分方程式の境界値問題



楕円型偏微分方程式の境界値問題

歴史:

有限次元
Newton法

1988年
中尾充宏先生
FS-Int

1990年
中尾充宏先生
FN-Int

2004年
中尾充宏先生
FN-Norm

力学系へ応用!

今回の扱う!

無限次元
Newton法

線形化作用素
逆作用素ノルム

無限次元
固有値

1992年
M. Plum先生
Kantorovich-likeの定理

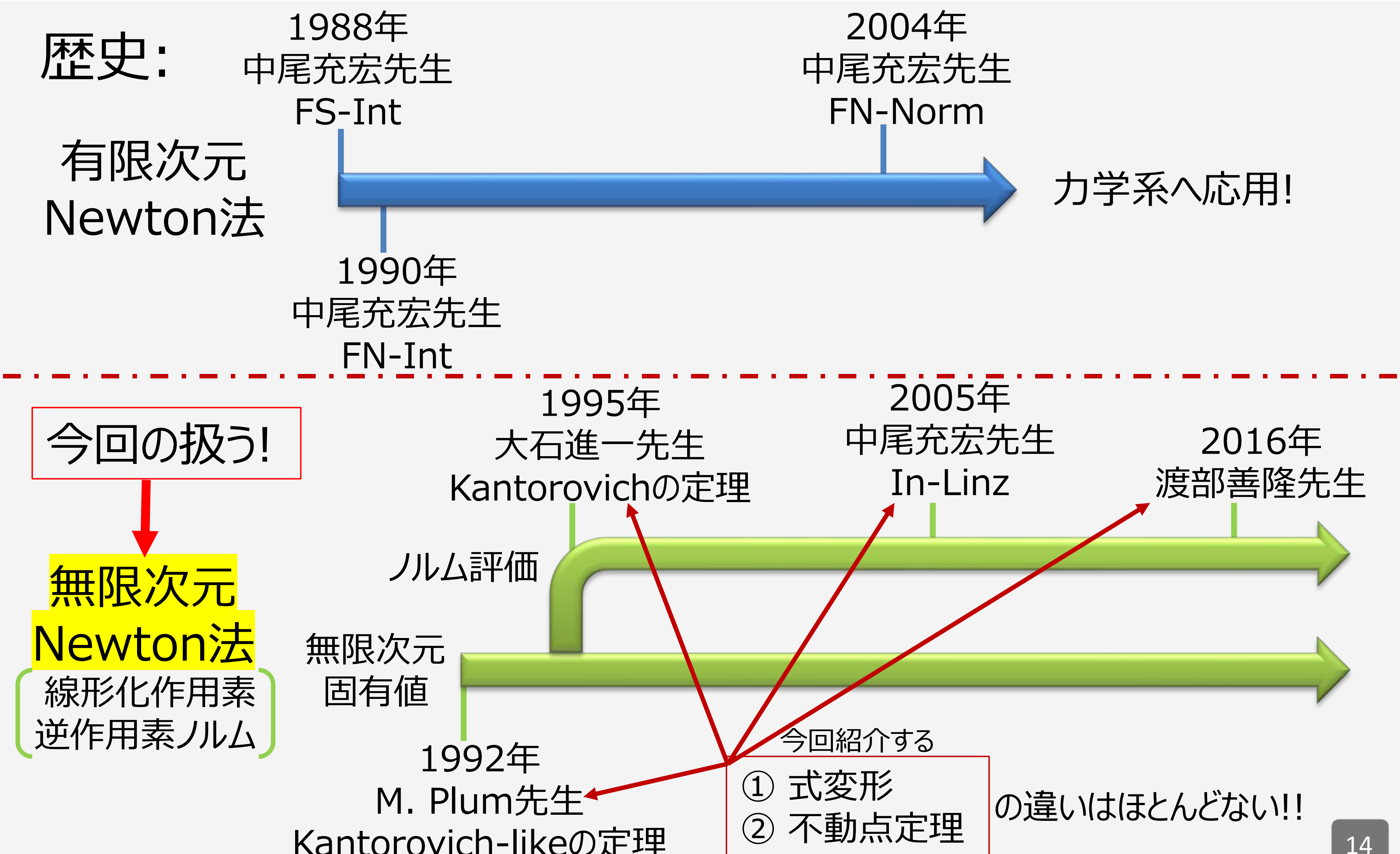
ノルム評価

1995年
大石進一先生
Kantorovichの定理

2005年
中尾充宏先生
In-Linz

2016年
渡部善隆先生

楕円型偏微分方程式の境界値問題



楕円型偏微分方程式の境界値問題

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

作用素方程式

$$F(u) = 0$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

③評価

・線形化作用素の
逆作用素のノルム評価

・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

いきなり偏微分方程式を扱うと混乱しがちになるので，
$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する
連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

をあえて「①式変形」，「②不動点定理」のステップを踏んで
精度保証付き数値計算法の理論を作ってみましょう!

不動点定理の準備

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．

よくわからないなぁと思う人は
・連立一次方程式では $\mathbb{R}^n$
・楕円型偏微分方程式では $H_0^1(\Omega)$

と思っていてください!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．

よくわからないなぁと思う人は
・連立一次方程式では $\mathbb{R}^n$
・楕円型偏微分方程式では $H_0^1(\Omega)$

と思っていてください!!

ここで，解を探す空間が決定します!
(そして近似解をとってきていい空間も決まります)

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T: X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

式の形が重要です!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Schauderの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする．
$T : W \to W$ がコンパクト作用素であるとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する．

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Schauderの不動点定理

$\boxed{W}$ を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする．
$T : W \to W$ がコンパクト作用素であるとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する．

Wは後ほど，適当に作成します！
Wを作成した後，「不動点定理を満たすかな?」って
確認し，再度Wを作成しなおします!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Schauderの不動点定理

$\boxed{W}$ を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする．
$T : W \to W$ がコンパクト作用素であるとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する．

*W*は後ほど，適当に作成します！
*W*を作成した後，「不動点定理を満たすかな?」って
確認し，再度*W*を作成しなおします!!

*W*は候補者集合と
呼ばれる!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T: X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Schauderの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする．
$\boxed{T: W \to W}$ がコンパクト作用素であるとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する．

*W*を適当につくったら，普通は満たしません!
この条件を満たすかどうか，コンピュータでチェックします．
この条件が，一番きついのです!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Schauderの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする．
$T : W \to W$ がコンパクト作用素であるとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する．

数学的に証明します．
コンピュータを使わずにいいます．

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Schauderの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T はコンパクトですか?

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Schauderの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか? ➡ コンピュータで確認!!

III. 作用素 T はコンパクトですか? ➡ 数学で確認!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Banachの不動点定理

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Banachの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない閉集合とする．$T : W \to W$ に対し

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_X \le k\|w_1 - w_2\|_X, \ \forall w_1, w_2 \in W$$

となる定数 k が $0 \le k < 1$ を満たすとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在し，一意である．

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Banachの不動点定理

$\boxed{W}$ を Banach 空間 X の空でない閉集合とする．$T : W \to W$ に対し

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_X \leq k\|w_1 - w_2\|_X, \ \forall w_1, w_2 \in W$$

となる定数 k が $0 \leq k < 1$ を満たすとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在し，一意である．

候補者集合ですね!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Banachの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない閉集合とする．$\boxed{T : W \to W}$ に対し

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_X \le k\|w_1 - w_2\|_X, \ \forall w_1, w_2 \in W$$

となる定数 k が $0 \le k < 1$ を満たすとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在し，一意である．

この条件もSchauderの不動点定理と同じですね!!
そして，大変さも同じ…

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Banachの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない閉集合とする．$T : W \to W$ に対し

$$\boxed{\|T(w_1) - T(w_2)\|_X \le k\|w_1 - w_2\|_X,\ \forall w_1, w_2 \in W}$$

となる $\boxed{\text{定数 } k \text{ が } 0 \le k < 1}$ を満たすとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在し，一意である．

コンパクト性を言わずに，定数kが1未満であることをいいます．
この条件を満たす写像を縮小写像といいます.これは，コンピュータも駆使して示します!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T : X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Banachの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない閉集合とする．$T : W \to W$ に対し

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_X \leq k\|w_1 - w_2\|_X, \ \forall w_1, w_2 \in W$$

となる定数 k が $0 < k < 1$ を満たすとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在し，一意である．

条件を満たせば，不動点方程式の解の存在が言えます!
Schauderの不動点定理と違い，候補者集合W内で一意性も示せます!!

不動点定理の準備

X を Banach 空間とし，$T: X \to X$ を非線形作用素とする．
不動点方程式

$$\text{Find } w \in X \text{ s.t. } w = T(w)$$

に対して 2 つの不動点定理を紹介する．

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

不動点定理の準備

Schauderの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T はコンパクトですか?

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

不動点定理の準備

Schauderの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T はコンパクトですか?

候補者集合*W*は
どのように作りますか?

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

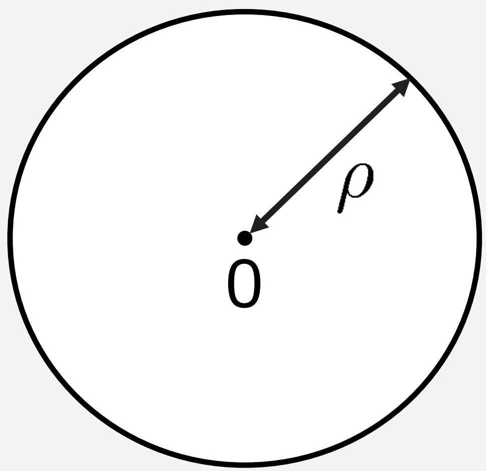
II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

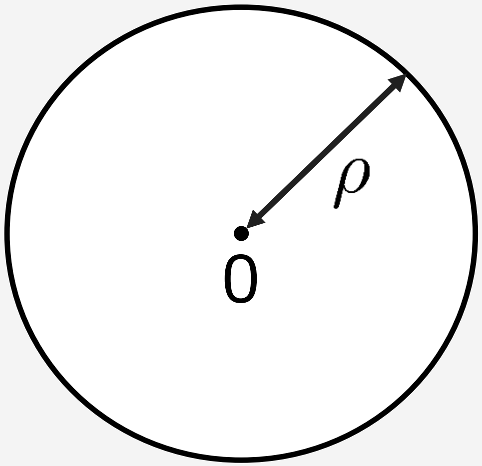
W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$



不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$



※ このとき ρ は変数にしておきます!!

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$
※ このとき ρ は変数にしておきます!!

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$
※ このとき ρ は変数にしておきます!!

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$
※ このとき ρ は変数にしておきます!!

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

Wは中心が**ゼロ**ですね!!

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$
※ このとき ρ は変数にしておきます!!

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

Wは中心が**ゼロ**ですね!!

⇒ $\displaystyle\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$ がいえれば，OK!!

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.

即ち, $W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$

※ このとき ρ は変数にしておきます!!

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

Wは中心が**ゼロ**ですね!!

$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$ がいえれば, OK!!

定義域Wのどんな要素を入れても半径ρを飛び出ることはない!!

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$
※ このとき ρ は変数にしておきます!!

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $\boxed{T(W) \subset W}$ が成り立つかどうか!!

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho}$$

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$
※ このとき ρ は変数にしておきます!!

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $\boxed{T(W) \subset W}$ が成り立つかどうか!!

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho}$$

このとき,
・「ρをfor文で適当に変えながら与えて, 条件を満たすかな?と確認」してもOK!!
・問題によっては, 「条件を満たすρはこうなるはず!」って式を出すことも可能!!

不動点定理の準備

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$
※ このとき ρ は変数にしておきます!!

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$$

Schauder III. 作用素 T はコンパクトですか?

Banach III. 作用素 T は縮小写像ですか?

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

Schauderの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする.
$T : W \to W$ がコンパクト作用素であるとき,
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する.

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

$\mathbb{R}^n$

Schauderの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする．
$T: W \to W$ がコンパクト作用素であるとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する．

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

行列ならばコンパクト作用素!!

Schauderの不動点定理

W を Banach 空間 X の空でない有界凸閉集合とする．
$T : W \to W$ が $\boxed{\text{コンパクト作用素}}$ であるとき，
$w = T(w)$ を満たす解 w は W 内に存在する．

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

Schauderの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

✓ III. 作用素 T はコンパクトですか?

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち，$W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \rho\}$

Schauderの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T はコンパクトですか?

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

候補者集合

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする．
即ち，$W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \rho\}$

候補者集合Wで解の存在がいえるように式変形!!

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

<u>候補者集合</u>

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.

即ち，$W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \leq \rho\}$

<u>近似解</u>(不動点定理で設定しているXの元なら何でもOK!)

$$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

<u>候補者集合</u>

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち，$W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \leq \rho\}$

<u>近似解</u>(不動点定理で設定しているXの元なら何でもOK!)

$$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$$

(これをいうのがAx=bの解xに対しては自然)

中心 $\hat{x}$ の半径 ρ の閉球 U 内に真の解 x^* が存在.
即ち，$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \leq \rho\}$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x\in\mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax=b$$

<u>候補者集合</u>

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち，$W=\{w\in\mathbb{R}^n \mid \|w\|\le\rho\}$

ギャップを埋めるのが近似解 $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$

中心 $\hat{x}$ の半径 ρ の閉球 U 内に真の解 x^* が存在.
即ち，$U=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-\hat{x}\|\le\rho\}$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x\in\mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax=b$$

<u>候補者集合</u>

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち，$W=\{w\in\mathbb{R}^n \mid \|w\|\le\rho\}$

ギャップを埋めるのが近似解 $\hat{x}\in\mathbb{R}^n$

$\boxed{w:=x-\hat{x} \text{ とする!!}}$

中心 $\hat{x}$ の半径 ρ の閉球 U 内に真の解 x^* が存在.
即ち，$U=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-\hat{x}\|\le\rho\}$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

<u>式変形</u>

$$A(x - \hat{x}) = b - A\hat{x}$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

<u>式変形</u>

$$A(x - \hat{x}) = b - A\hat{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 = (b - A\hat{x}) - Aw$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

<u>式変形</u>

$$A(x-\hat{x}) = b - A\hat{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (b - A\hat{x}) - Aw$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

式変形

$$A(x - \hat{x}) = b - A\hat{x}$$

$$\Leftrightarrow 0 = (b - A\hat{x}) - Aw$$

$$\Leftrightarrow 0 = R(b - A\hat{x}) - RAw$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } Ax=b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

式変形

$$A(x-\hat{x}) = b - A\hat{x}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = (b - A\hat{x}) - Aw$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = R(b - A\hat{x}) - RAw$$

$$\Leftrightarrow\ w = R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

不動点方程式

$$\text{Find } w \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } w = T(w)$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

不動点方程式

$$\text{Find } w \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } w = T(w)$$

※なぜ近似逆行列Rが必要なの? 解きほぐすと...

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n\times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x\in\mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax=b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

$$T(w) := R(b-A\hat{x}) + (I-RA)w$$

不動点方程式

$$\text{Find } w\in\mathbb{R}^n \text{s.t. } w=T(w)$$

※なぜ近似逆行列Rが必要なの? 解きほぐすと…

$$x^* = \hat{x} - R(A\hat{x}-b) + (I-RA)w$$

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$n \times n$行列Aと，n次元ベクトルbに対する連立一次方程式

$$\text{Find } x \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } Ax = b$$

$$w := x^* - \hat{x}$$

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

不動点方程式

$$\text{Find } w \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } w = T(w)$$

※なぜ近似逆行列Rが必要なの? 解きほぐすと...

$$x^* = \hat{x} - R(A\hat{x} - b) + (I - RA)w$$

Newton法 ＋ 余り

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

不動点方程式

$$\text{Find } w \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } w = T(w)$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

Schauderの不動点定理

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \rho\}$

Schauderの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T はコンパクトですか?

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \le \rho$$ を満たすようにρを設定できればOK!

練習:

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは$T(W) \subset W$が成り立つかどうか!!

$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \le \rho$$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

$$\sup_{w \in W} \|R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w\|$$

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

$$\sup_{w \in W} \|R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w\|$$
$$\leq \|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\| \sup_{w \in W} \|w\|$$

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \le \rho$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

$$\sup_{w \in W} \|R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w\|$$
$$\le \|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\| \boxed{\sup_{w \in W} \|w\|}$$

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \rho\}$

練習:

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$T(w) := R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w$$

$$\begin{aligned}
&\sup_{w \in W} \|R(b - A\hat{x}) + (I - RA)w\| \\
&\leq \|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\| \sup_{w \in W} \|w\| \\
&\leq \|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho
\end{aligned}$$

練習:

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$$

を満たすようにρを設定できればOK!

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$$

を満たすようにρを設定できればOK!

※線形問題だとρの次数は最高1次
非線形問題だとρの次数は問題によって変化!!

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$ を満たすようにρを設定できればOK!

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$

を満たすようにρを設定できればOK!

※線形問題だとρの次数は最高1次
非線形問題だとρの次数は問題によって変化!!

・半線形偏微分方程式の場合は, ρを徐々に変化させて, 成り立つρを探す

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

重要なのは $T(W) \subset W$ が成り立つかどうか!!

$\sup\limits_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$ を満たすようにρを設定できればOK!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$$

を満たすようにρを設定できればOK!

※線形問題だとρの次数は最高1次
非線形問題だとρの次数は問題によって変化!!

- 半線形偏微分方程式の場合は, ρを徐々に変化させて, 成り立つρを探す
- 連立一次方程式の場合は, ρが存在する条件を出せる!

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

練習:

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho = \rho$$

練習:

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \le \rho$$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho = \rho$$

$$\Leftrightarrow (1 - \|I - RA\|)\rho = \|R(b - A\hat{x})\|$$

練習:

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho = \rho$$

$$\Leftrightarrow (1 - \|I - RA\|)\rho = \|R(b - A\hat{x})\|$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|}$$

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho = \rho$$

$$\Leftrightarrow (1 - \|I - RA\|)\rho = \|R(b - A\hat{x})\|$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|}$$

まだ, 条件が足りません!
ここで, ρは何だったか思い出しましょう!

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho = \rho$$

$$\Leftrightarrow (1 - \|I - RA\|)\rho = \|R(b - A\hat{x})\|$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|}$$

まだ, 条件が足りません!
ここで, ρは何だったか思い出しましょう!

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \leq \rho\}$

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho = \rho$$

$$\Leftrightarrow (1 - \|I - RA\|)\rho = \|R(b - A\hat{x})\|$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|}$$

まだ, 条件が足りません!
ここで, ρは何だったか思い出しましょう!

ρは非負!!

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする.
即ち, $W = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \leq \rho\}$

練習:

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho \leq \rho$ を満たすρの設定

イコールが成り立つ条件を考えてみましょう!

$$\|R(b - A\hat{x})\| + \|I - RA\|\rho = \rho$$

$$\Leftrightarrow (1 - \|I - RA\|)\rho = \|R(b - A\hat{x})\|$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|}$$ and $\|I - RA\| < 1$

練習:

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$\|I - RA\| < 1$ が成り立つならば,
$\rho = \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|}$ と設定すれば,
$T : W \to W$ は成り立つ!

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

不動点方程式

$$\text{Find } w \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } w = T(w)$$

$\|I - RA\| < 1$ ならば,

$$W = \left\{ w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$$ 内に

$w = T(w)$ を満たす解が存在する.

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

不動点方程式

$$\text{Find } w \in \mathbb{R}^n \text{s.t. } w = T(w)$$

$\|I - RA\| < 1$ ならば,

$W = \left\{ w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\| \le \frac{\|R(b-A\hat{x})\|}{1-\|I-RA\|} \right\}$ 内に

$w = T(w)$ を満たす解が存在する.

中心 $\hat{x}$ の半径 ρ の閉球 U 内に真の解 x^* が存在.

即ち, $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \le \rho\}$

でいいなおしてみると...

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,
$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \leq \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$ 内に
$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,
$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \leq \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$ 内に
$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

- Schauderの不動点定理
- Banachの不動点定理
- Kantorovichの定理

③評価

- 線形化作用素の逆作用素のノルム評価
- 残差ノルムの評価
- Lipschitz定数の評価

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I-RA\|<1$ ならば,
$U=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-\hat{x}\|\le\frac{\|R(b-A\hat{x})\|}{1-\|I-RA\|}\right\}$ 内に
$Ax=b$ を満たす解 x^* が存在する.

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w=T(w)$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

いまの導出方法とほぼ同じ!!

③評価

・線形化作用素の
　逆作用素のノルム評価

・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I-RA\|<1$ ならば,
$U=\left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x-\hat{x}\|\le\frac{\|R(b-A\hat{x})\|}{1-\|I-RA\|}\right\}$ 内に
$Ax=b$ を満たす解 x^* が存在する.

ノルムの
具体的な計算

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w=T(w)$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

③評価

・線形化作用素の
　逆作用素のノルム評価

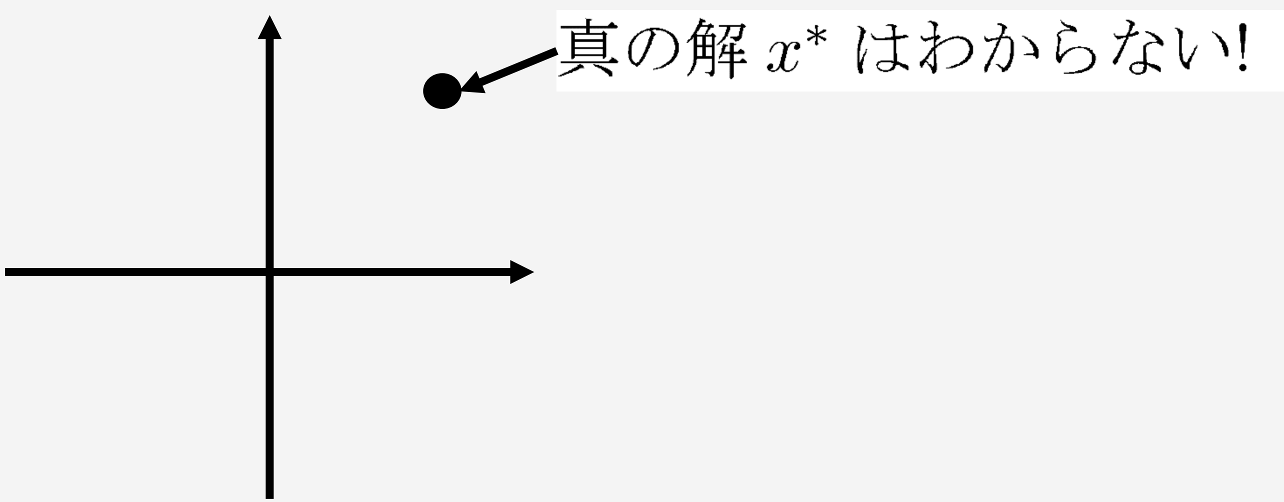
・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,
$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \leq \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$ 内に
$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.



イメージ図

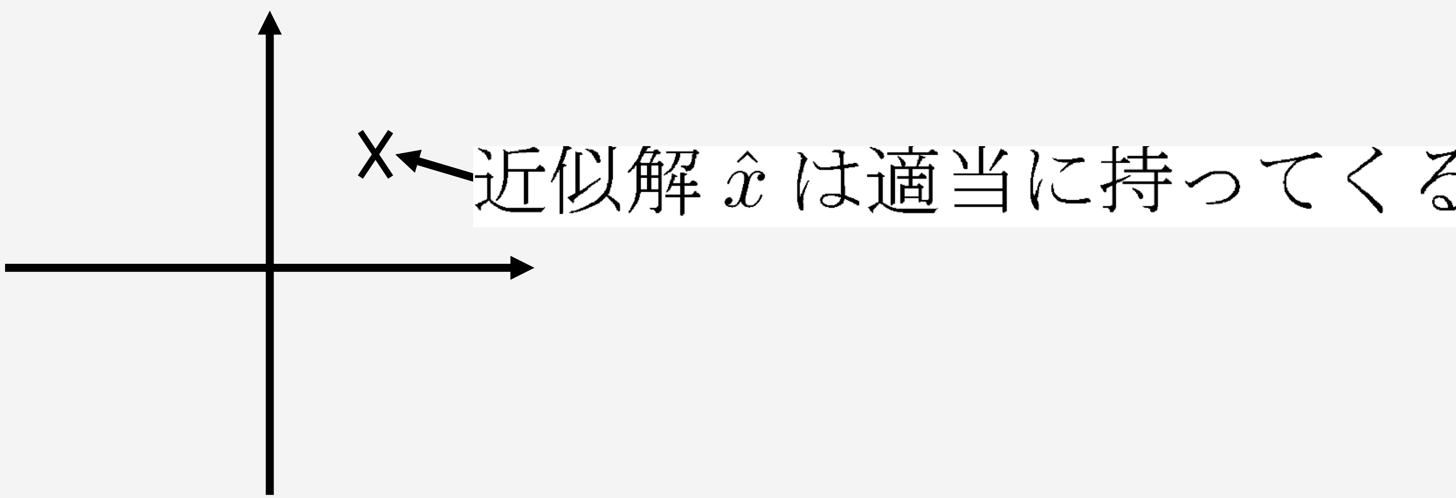
練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x - \hat{x}\| \le \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$$ 内に

$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.

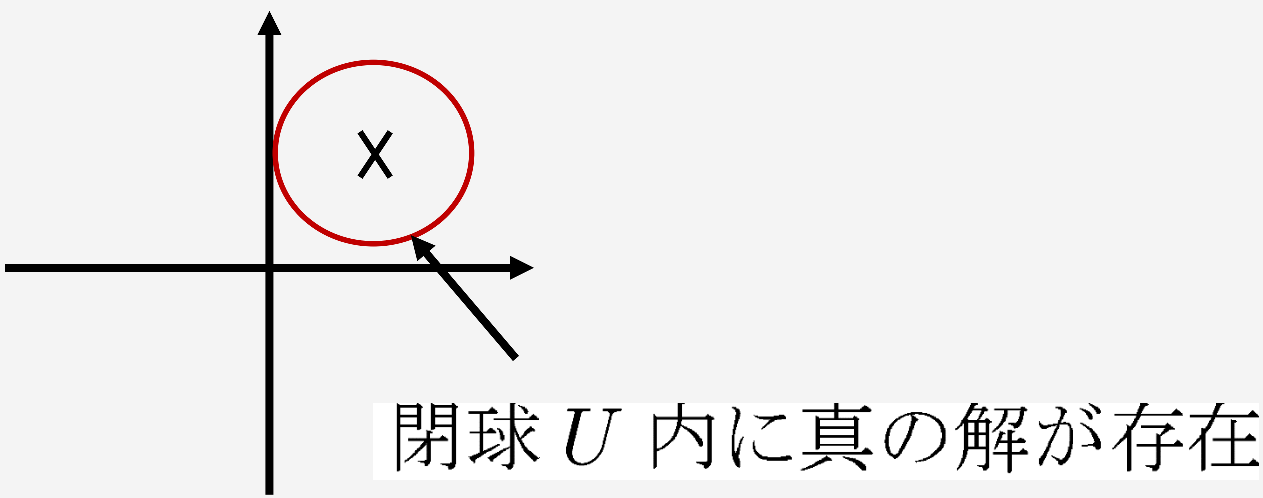


イメージ図

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,
$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \le \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$ 内に
$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.

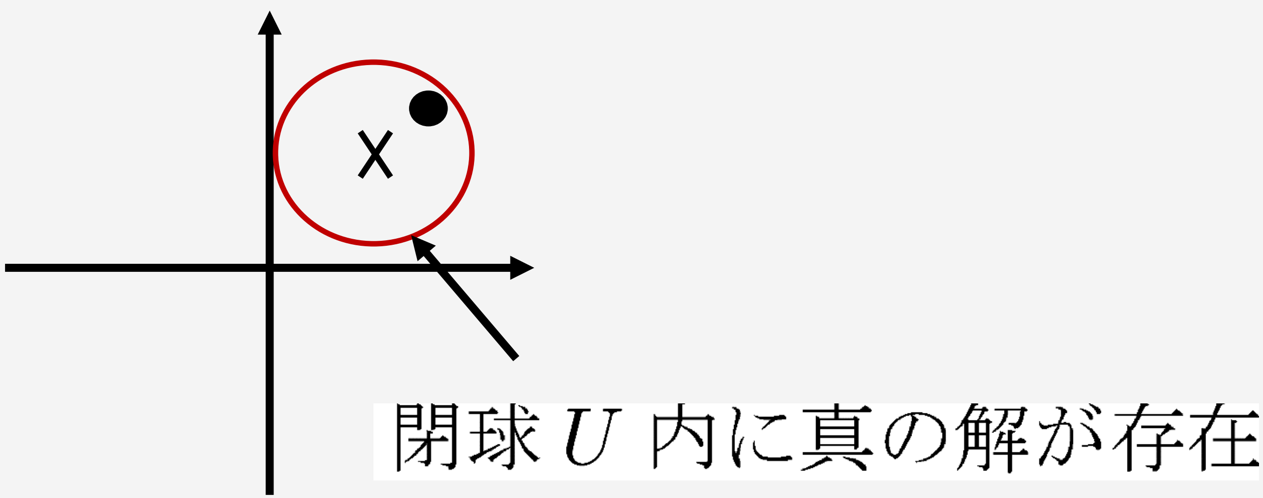


イメージ図

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,
$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \le \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$ 内に
$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.

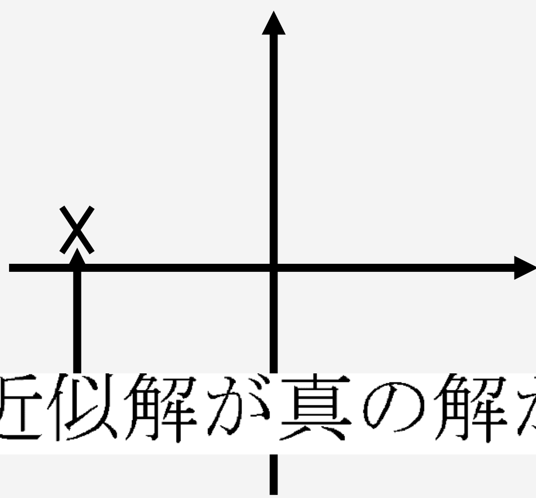


イメージ図

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,
$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \leq \frac{\|R(b - A\hat{x})\|}{1 - \|I - RA\|} \right\}$ 内に
$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.



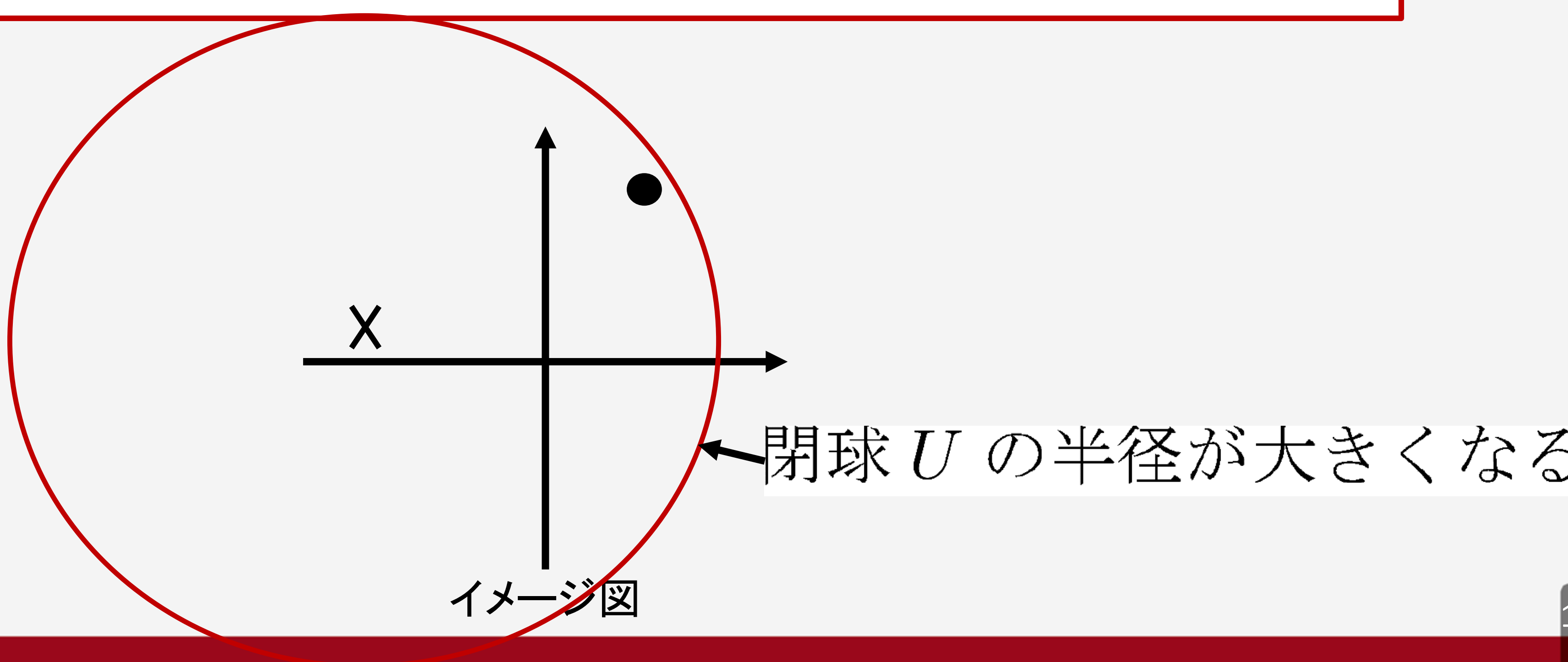
もし近似解が真の解から遠い場合は...

イメージ図

練習:

連立一次方程式の解の精度保証付き数値計算法を作ってみよう!

$\|I - RA\| < 1$ ならば,
$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| \leq \frac{\|R(b-A\hat{x})\|}{1-\|I-RA\|} \right\}$ 内に
$Ax = b$ を満たす解 x^* が存在する.



Emden方程式の解の精度保証法の導出

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

③評価

・線形化作用素の
　逆作用素のノルム評価

・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

Emden方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の精度保証付き数値計算法を導出してみよう!

Emden方程式の解の精度保証法の導出

Emden方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の精度保証付き数値計算法を導出してみよう!

$\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$

を弱ラプラシアンとすると…

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

Emden方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の精度保証付き数値計算法を導出してみよう!

$\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$

を弱ラプラシアンとすると…

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

「よくわからないぞ!」って場合は,
「連立一次方程式っぽく書けるんだ!」と思って頂ければとりあえずOK.
非線形であることだけ注意して下さい!!

Emden方程式の解の精度保証法の導出

Emden方程式のDirichlet境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解の精度保証付き数値計算法を導出してみよう!

$\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$

を弱ラプラシアンとすると…

$$\text{Find } u \in \boxed{H_0^1(\Omega)} \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

不動点定理を使う空間 X を $H_0^1(\Omega)$ にする.

(即ち，近似解を選ぶ空間もここで決定しました．)

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

近似解 $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ を用意し,
$w = u - \hat{u}$ として，不動点方程式を作成する.

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad & \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2 \\
\iff \quad & \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w + \hat{u})^2 \\
\iff \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2 \\
\iff \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2 + 2\hat{u}w
\end{aligned}$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad & \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2 \\
\iff \quad & \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w + \hat{u})^2 \\
\iff \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2 \\
\iff \quad & \mathcal{A}w = \underbrace{-(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2)}_{\text{残差}} + \underbrace{w^2 + 2\hat{u}w}_{\text{余り}}
\end{aligned}$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w + \hat{u})^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2 + 2\hat{u}w
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad w = -\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{A}^{-1}\left(w^2 + 2\hat{u}w\right)$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w + \hat{u})^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2 + 2\hat{u}w
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad w = -\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{A}^{-1}\left(w^2 + 2\hat{u}w\right)$$

これは3.1節の実用的ではない不動点形式です!!

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w + \hat{u})^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2 + 2\hat{u}w
\end{aligned}$$

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\| \le \rho$$

が通りにくい…
(問題依存)

$$\Longleftrightarrow \quad w = -\underbrace{\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2)}_{\text{Newton法になっていない…}} + \underbrace{\mathcal{A}^{-1}\left(w^2 + 2\hat{u}w\right)}_{\text{wについて一次の項が残っている}}$$

これは3.1節の実用的ではない不動点形式です!!

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w + \hat{u})^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2 + 2\hat{u}w$$

wが一次の項はまとめる

$$\Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A} - 2\hat{u})w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow &\quad \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2 \\
\Longleftrightarrow &\quad \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w + \hat{u})^2 \\
\Longleftrightarrow &\quad \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w + \hat{u})^2 - \hat{u}^2 \\
\Longleftrightarrow &\quad \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2 + 2\hat{u}w
\end{aligned}$$

wが一次の項はまとめる

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{(\mathcal{A} - 2\hat{u})}_{}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2$$

実は $\mathcal{A}u - u^2$ の $\hat{u}$ におけるフレッシェ微分!!

(近似解をNewton法で求める際に,
ヤコビ行列を作りますよね?それの無限次元版です!)

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\begin{aligned}
\iff\quad & \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} = -\mathcal{A}\hat{u} + u^2 \\
\iff\quad & \mathcal{A}w = -\mathcal{A}\hat{u} + (w+\hat{u})^2 \\
\iff\quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + (w+\hat{u})^2 - \hat{u}^2 \\
\iff\quad & \mathcal{A}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2 + 2\hat{u}w
\end{aligned}$$

wが一次の項はまとめる

$$\iff\quad \underbrace{(\mathcal{A} - 2\hat{u})}_{\mathcal{F}'[\hat{u}]w \text{ と書く}}w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2$$

線形化作用素と呼ばれます!
よく研究対象にされています!!

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$
$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}'[\hat{u}]w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2$$

(条件1) 線形化作用素 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ は正則とする

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$
$$\iff \quad \mathcal{F}'[\hat{u}]w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2$$

(条件1) 線形化作用素 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ は正則とする

コンピュータを駆使して証明します

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}u = u^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}'[\hat{u}]w = -(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + w^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad w = \underbrace{-\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2)}_{\text{Newton法}} + \underbrace{\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2}_{\text{wについて一次の項が消えた!!}}$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

$$\text{Find } w \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } w = T(w)$$

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

・Banachの不動点定理

③評価

・線形化作用素の
逆作用素のノルム評価

・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

$$\text{Find } w \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } w = T(w)$$

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

$$\text{Find } w \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } w = T(w)$$

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする．
即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T: W \to W$ は成り立ちますか?

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

$$\text{Find } w \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } w = T(w)$$

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする．即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか? $\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$$

$$\begin{aligned}
&\sup_{w \in W} \left\| -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} w^2 \right\|_{H_0^1} \\
\leq \quad & \left\| \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} \right\| \left\| \mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2 \right\| + \left\| \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} \right\| \sup_{w \in W} \left\| w^2 \right\|
\end{aligned}$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\sup_{w\in W} \|T(w)\|_X \le \rho$$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{w\in W} \left\|-\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2)+\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2\right\|_{H_0^1} \\
\le\ & \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \left\|\mathcal{A}\hat{u}-\hat{u}^2\right\| + \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \sup_{w\in W} \left\|w^2\right\|
\end{aligned}
$$

(条件2) 線形化作用素の逆作用素のノルム評価

線形化作用素の評価が一番大変…

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \leq \rho$$

$$\begin{aligned} & \sup_{w \in W} \left\| -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} w^2 \right\|_{H_0^1} \\ \leq \quad & \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\| + \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \sup_{w \in W} \left\|w^2\right\| \end{aligned}$$

(条件3) 残差ノルム

コンピュータで直接計算します!!

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\sup_{w\in W} \|T(w)\|_X \le \rho$$

$$\sup_{w\in W} \left\| -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} w^2 \right\|_{H_0^1}$$

$$\le \quad \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\| + \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \sup_{w\in W} \left\|w^2\right\|$$

(条件3) リプシッツ条件にあたる項

ソボレフ埋め込み定理の
具体的な定数を利用

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$\sup_{w \in W} \|T(w)\|_X \le \rho$$

$$\begin{aligned}
& \sup_{w\in W} \left\| -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1} w^2 \right\|_{H_0^1} \\
\le\ & \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\| + \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \sup_{w\in W} \left\|w^2\right\| \\
\le\ & \boxed{\left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| \left\|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\right\| + \left\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\right\| C_s \rho^2 \le \rho}
\end{aligned}$$

不等式を満たすρを(手あたり次第)探す.

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

$$\text{Find } w \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } w = T(w)$$

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする．
即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \leq \rho\}$

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$$\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| \, \|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\| + \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| C_s \rho^2 \leq \rho$$

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

Emden方程式の解の精度保証法の導出

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

不等式を満たすkが0以上1未満

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_{H_0^1} \le k\|w_1 - w_2\|_{H_0^1},\ \ w_1, w_2 \in W$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

不等式を満たすkが0以上1未満

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_{H_0^1} \leq k\|w_1 - w_2\|_{H_0^1},\ \ w_1, w_2 \in W$$

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(w_1^2 - w_2^2)\|_{H_0^1} \\ \leq \quad & \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| \|w_1^2 - w_2^2\| \\ \leq \quad & C_{s2}\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| \|w_1 - w_2\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

不等式を満たすkが0以上1未満

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_{H_0^1} \leq k\|w_1 - w_2\|_{H_0^1},\ \ w_1, w_2 \in W$$

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(w_1^2 - w_2^2)\|_{H_0^1} \\ \leq\ & \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\|\|w_1^2 - w_2^2\| \\ \leq\ & C_{s2}\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\|\|w_1 - w_2\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

(条件2) 線形化作用素の逆作用素のノルム評価

Emden方程式の解の精度保証法の導出

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

不等式を満たすkが0以上1未満

$$\|T(w_1) - T(w_2)\|_{H_0^1} \leq k\|w_1 - w_2\|_{H_0^1}, \ w_1, w_2 \in W$$

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(w_1^2 - w_2^2)\|_{H_0^1} \\ \leq \ & \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\|\|w_1^2 - w_2^2\| \\ \leq \ & C_{s2}\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\|\|w_1 - w_2\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

ソボレフ埋め込み定理の具体的な数値

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

$$\text{Find } w \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } w = T(w)$$

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする．
即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \rho\}$

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$$\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| \, \|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\| + \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| C_s \rho^2 \le \rho$$

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

$$C_{s2}\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| < 1$$

Emden方程式の解の精度保証法の導出

$$T(w) := -\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}(\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2) + \mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}w^2$$

Find $w \in H_0^1(\Omega)$ s.t. $w = T(w)$

W は中心ゼロの半径 ρ の小さな閉球とする．
即ち，$W = \{w \in X \mid \|w\|_X \le \rho\}$

Banachの不動点定理

I. 有界な凸閉集合 $W \subset X$ を作成

II. $T : W \to W$ は成り立ちますか?

$$\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| \, \|\mathcal{A}\hat{u} - \hat{u}^2\| + \|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| C_s \rho^2 \le \rho$$

III. 作用素 T は縮小写像ですか?

$$C_{s2}\|\mathcal{F}'[\hat{u}]^{-1}\| < 1$$

まとめ

楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法のステップ

①式変形

不動点形式

$$w = T(w)$$

②不動点定理

・Schauderの不動点定理
・Banachの不動点定理
・Kantorovichの定理

③評価

・線形化作用素の
逆作用素のノルム評価

・残差ノルムの評価

・Lipschitz定数の評価

今回はここ!

テキストの4章は一般の場合
(ぜひチャレンジを…)

書籍へ